14ο Λύκειο Περιστερίου

Κριτήριο αξιολόγησης στα Πολυώνυμα

Ονοματεπώνυμο:………………………………………………………………………….. Ομάδα: Α

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο διαιρούμενο με το x^2-4 δίνει υπόλοιπο $4x+1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=5$.

Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ είναι το $\pi(x)=x^3-1$, τότε:

β) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ και να λύσετε την ανίσωση $P(x)<4x+1$.

γ) Να βρείτε τα β, γ, $\delta\in\mathbb{R}$ για τα οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$(\beta-1)x^{2024}+(\gamma-2)x^{1821}+\delta-1=P(x)-x^5+4x^3+x^2-4x$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{(x^3-1)(x-2)}{P(x)-4x-1}>\dfrac{2}{x-2}$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x-P(0)+2}>x-P(1)$.

στ) Δίνεται το πολυώνυμο $Q(x)=(P(x))^{1924}+(P(x))^{1453}-1$.

Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το (x^2-4).

μονάδες 24+20+16+20+15+7

14ο Λύκειο Περιστερίου

Κριτήριο αξιολόγησης στα Πολυώνυμα

Ονοματεπώνυμο:……………………………………………………………………….. Ομάδα: Β

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+\alpha x+\beta$ και $\delta(x)=x^2-1$.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x)=2x-3$.

α) Να αποδείξετε α = 7 και β = - 9.

Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x^2-1)$ είναι το $\pi(x)=x^2-5x+6$, τότε:

β) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2-1)$ και να λύσετε την ανίσωση $P(x)<2x-3$.

γ) Να βρείτε τα β, γ, $\delta\in\mathbb{R}$ για τα οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$(\beta-1)x^{1924}+(\gamma-2)x^{1453}+\delta-1=P(x)-x^4+5x^3-5x^2-7x$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{(x^2-1)(x-2)}{P(x)-2x+3}>\dfrac{2}{x+3}$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x-P(1)-4}<x+P(0)+4$.

στ) Δίνεται το πολυώνυμο $Q(x)=(P(x))^{2024}+(P(x))^{1821}-1$.

Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το (x^2-1).

μονάδες 24+20+16+20+15+7

14ο Λύκειο Περιστερίου

Κριτήριο αξιολόγησης στα Πολυώνυμα

Ονοματεπώνυμο:………………………………………………………………………….. Ομάδα: Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda-2)x^5+(\lambda-1)x^4-5x^3+5x^2+\alpha x+\beta,\ \lambda,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύουν τα εξής:

- είναι 4ου βαθμού.
- Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2-3x+2, είναι $2x-3$.

α) Να αποδείξετε $\lambda = 2$, $\alpha = 7$ και $\beta = -9$.

Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x^2-3x+2)$ είναι το $\pi(x)=x^2-2x-3$, τότε:

β) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2-3x+2)$ και να λύσετε την ανίσωση $P(x)<2x-3$.

γ) Να βρείτε τα β, γ, $\delta\in\mathbb{R}$ για τα οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$(\beta-1)x^{1924}+(\gamma-2)x^{1453}+\delta-1=P(x)-x^4+5x^3-5x^2-7x$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{P(x)-2x+3}>\dfrac{2}{x-2}$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x+P(0)+6}>x+P(-1)$.

στ) Δίνεται το πολυώνυμο $Q(x)=(P(x))^{2024}+(P(x))^{1821}-2$.

Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το (x^2-3x+2).

μονάδες 24+20+16+20+15+5

Κριτήριο αξιολόγησης στα Πολυώνυμα

Ονοματεπώνυμο:………………………………………………………………………….. Ομάδα: Δ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda-1)x^4+2x^3-x^2+\alpha x+\beta,\ \lambda,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύουν τα εξής:

- είναι 3ου βαθμού.
- Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2-4, είναι $x+2$.

α) Να αποδείξετε λ = 1, α = - 7 και β = 6.

Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ είναι το $\pi(x)=2x-1$, τότε:

β) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ και να λύσετε την ανίσωση $P(x)<x+2$.

γ) Να βρείτε τα β, γ, $\delta\in\mathbb{R}$ για τα οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$(\beta-1)x^{1924}+(\gamma-2)x^{1453}+\delta-1=P(x)-2x^3+x^2+7x$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{(x+1)(2x-1)}{P(x)-x-2}>\dfrac{2}{x+1}$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x-P(2)+1}<x-P(0)+1$.

στ) Δίνεται το πολυώνυμο $Q(x)=(P(x))^{2024}+(P(x))^{1453}+3$.

Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το (x^2-4).

μονάδες 24+20+16+20+15+5

Ομάδα Α

α) 1ος τρόπος

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$\alpha x + \beta - 4 = 4x + 1 \Leftrightarrow \alpha = 4$ και $\beta - 4 = 1 \Leftrightarrow \beta = 5$

$$\begin{array}{rl|l} & x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta & x^2 - 4 \\ + & -x^5 + 4x^3 & \\ \cline{1-3} & & x^3 - 1 \\ + & -x^2 + \alpha x + \beta & \\ & -x^2 - 4 & \\ \cline{2-2} & \alpha x + \beta - 4 & \end{array}$$

2ος τρόπος

Αν π(x) το πηλίκο της διαίρεσης τότε $P(x) = (x^2 - 4)\pi(x) + 4x + 1$.

Για x = 2 είναι $P(2) = (4-4)\pi(2) + 4 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow$

$32 - 32 - 4 + 2\alpha + \beta = 9 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 13 \; (1)$

Για x = - 2 είναι $P(-2) = (4-4)\pi(-2) + 4 \cdot (-2) + 1 \Leftrightarrow -32 + 32 - 4 - 2\alpha + \beta = -7 \Leftrightarrow -2\alpha + \beta = -3 \; (2)$

Από το σύστημα των (1), (2) προκύπτει $\alpha = 4$ και $\beta = 5$.

β) Είναι $P(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1) + 4x + 1$

$P(x) < 4x + 1 \Leftrightarrow$

$(x^2 - 4)(x^3 - 1) + 4x + 1 < 4x + 1 \Leftrightarrow$

$(x^2 - 4)(x^3 - 1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2)$

x	$-\infty$ - 2	1	2	$+\infty$
$x^2 - 4$	+ ο	-	- ο	+
$x^3 - 1$	-	- ο	+	+
Γινόμενο	-	+	-	+

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(\beta - 1)x^{2024} + (\gamma - 2)x^{1821} + \delta - 1 = P(x) - x^5 + 4x^3 + x^2 - 4x \Leftrightarrow$$

$$(\beta - 1)x^{2024} + (\gamma - 2)x^{1821} + \delta - 1 = x^5 - 4x^3 - x^2 + 4x + 5 - x^5 + 4x^3 + x^2 - 4x \Leftrightarrow$$

$$(\beta - 1)x^{2024} + (\gamma - 2)x^{1821} + \delta - 1 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta - 1 = 0 \\ \gamma - 2 = 0 \\ \delta - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \gamma = 2 \\ \delta = 6 \end{cases}$$

δ) $\dfrac{(x^3 - 1)(x - 2)}{P(x) - 4x - 1} > \dfrac{2}{x - 2} \Leftrightarrow \dfrac{(x^3 - 1)(x - 2)}{(x^2 - 4)(x^3 - 1)} > \dfrac{2}{x - 2} \Leftrightarrow \dfrac{\cancel{(x^3 - 1)}\,\cancel{(x - 2)}}{\cancel{(x - 2)}\,(x + 2)\,\cancel{(x^3 - 1)}} > \dfrac{2}{x - 2} \Leftrightarrow$

$x^3 - 1 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \pm 2$

$\dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{2}{x - 2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x - 2 - 2x - 4}{(x + 2)(x - 2)} > 0 \Leftrightarrow$

$(-x - 6)(x + 2)(x - 2) > 0 \Leftrightarrow$

$x \in (-6, -2) \cup (2, +\infty)$

x	$-\infty$ - 6	-2	2	$+\infty$
$-x - 6$	- ο	+	+	+
$x + 2$	-	- ο	+	+
$x - 2$	-	-	- ο	+
Γινόμενο	-	+	-	+

ε) $P(0) = 5, \; P(1) = 5$

$\sqrt{x - P(0) + 2} > x - P(1) \Leftrightarrow \sqrt{x - 3} > x - 5$ (3). Πρέπει $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Αν $x - 5 < 0 \Leftrightarrow 3 \leq x < 5$ τότε η (3) είναι αληθής. Αν $x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ η (3) γίνεται:

$\left(\sqrt{x - 3}\right)^2 > (x - 5)^2 \Leftrightarrow x - 3 > x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 < 0 \Leftrightarrow 4 < x < 7$ και από τον περιορισμό προκύπτει ότι $x \in [5, 7)$.

στ) $Q(2) = (P(2))^{1924} + (P(2))^{1453} - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$, $Q(-2) = (P(-2))^{1924} + (P(-2))^{1453} - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$.

Επειδή ο διαιρέτης είναι 2ου βαθμού, το υπόλοιπο θα είναι το πολύ 1ου βαθμού.

Έστω $\kappa x + \lambda$ το ζητούμενο υπόλοιπο, τότε αν π(x) το πηλίκο της διαίρεσης, ισχύει ότι:

$Q(x) = (x^2 - 4)\pi(x) + \kappa x + \lambda$.

Είναι $Q(2) = -1 \Leftrightarrow 2\kappa + \lambda = -1$ και $Q(-2) = -1 \Leftrightarrow -2\kappa + \lambda = -1$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$2\lambda=-2 \Leftrightarrow \lambda=-1$ και $2\kappa-1=-1 \Leftrightarrow \kappa=0$, οπότε το ζητούμενο υπόλοιπο είναι το – 1.

Ομάδα B

α)Αν π(x) το πηλίκο της διαίρεσης τότε $P(x)=(x^2-1)\pi(x)+2x-3$.

Για x = 1 είναι $P(1)=(1-1)\pi(1)+2\cdot 1-3 \Leftrightarrow 1-5+5+\alpha+\beta=-1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=-2\ (1)$

Για x = - 1 είναι $P(-1)=(1-1)\pi(-1)+2\cdot(-1)-3 \Leftrightarrow 1+5+5-\alpha+\beta=-5 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=-16\ (2)$

Από το σύστημα των (1), (2) προκύπτει α = 7 και β = - 9.

β) Είναι $P(x)=(x^2-1)(x^2-5x+6)+2x-3=x^4-5x^3+5x^2+7x-9$

$P(x)<2x-3 \Leftrightarrow$

$(x^2-1)(x^2-5x+6)+2x-3<2x-3 \Leftrightarrow$

$(x^2-1)(x^2-5x+6)<0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)\cup(2,3)$

x	−∞	-1	1	2	3 +∞
x^2-1	+ 0	- 0	+	+	+
x^2-5x+6	+	+	+ 0	- 0	+
Γινόμενο	+	-	+	-	+

γ) $(\beta-1)x^{1924}+(\gamma-2)x^{1453}+\delta-1=P(x)-x^4+5x^3-5x^2-7x \Leftrightarrow$

$(\beta-1)x^{1924}+(\gamma-2)x^{1453}+\delta-1=x^4-5x^3+5x^2+7x-9-x^4+5x^3-5x^2-7x \Leftrightarrow$

$$(\beta-1)x^{1924}+(\gamma-2)x^{1453}+\delta-1=9 \Leftrightarrow \begin{cases}\beta-1=0\\ \gamma-2=0\\ \delta-1=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=1\\ \gamma=2\\ \delta=10\end{cases}$$

δ) $$\frac{(x^2-1)(x-2)}{P(x)-2x+3}>\frac{2}{x+3} \Leftrightarrow \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x^2-1)(x^2-5x+6)}>\frac{2}{x+3} \Leftrightarrow \frac{\cancel{(x^2-1)}\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x^2-1)}\,\cancel{(x-2)}\,(x-3)}>\frac{2}{x+3} \Leftrightarrow$$

$x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$ και $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

$\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x+3}>0 \Leftrightarrow \frac{x+3-2x+6}{(x+3)(x-3)}>0 \Leftrightarrow$

$(-x+9)(x+3)(x-3)>0 \Leftrightarrow$

$x\in(-\infty,-3)\cup(3,9)$

x	−∞	-3	3	9 +∞
$-x+9$	+	+	+ 0	-
$x+3$	- 0	+	+	+
$x-3$	-	- 0	+	+
Γινόμενο	+	-	+	-

ε) $P(1)=-1,\ P(0)=-9$

$\sqrt{x-P(1)-4}<x+P(0)+4 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}<x-5$ (3). Πρέπει $x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 3$.

Αν $x-5<0 \Leftrightarrow 3\leq x<5$ τότε η (3) είναι αδύνατη. Αν $x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 5$ η (3) γίνεται:

$\left(\sqrt{x-3}\right)^2<(x-5)^2 \Leftrightarrow x-3<x^2-10x+25 \Leftrightarrow x^2-11x+28>0 \Leftrightarrow x<4$ ή $x>7$ και από τον περιορισμό προκύπτει ότι $x\in(7,+\infty)$.

στ) $Q(1)=(P(1))^{2024}+(P(1))^{1821}-1=0+0-1=-1,\ Q(-1)=(P(-1))^{2024}+(P(-1))^{1821}-1=0+0-1=-1$.

Επειδή ο διαιρέτης είναι 2ου βαθμού, το υπόλοιπο θα είναι το πολύ 1ου βαθμού.

Έστω $\kappa x+\lambda$ το ζητούμενο υπόλοιπο, τότε αν π(x) το πηλίκο της διαίρεσης, ισχύει ότι: $Q(x)=(x^2-1)\pi(x)+\kappa x+\lambda$.

Είναι $Q(1)=-1 \Leftrightarrow \kappa+\lambda=-1$ και $Q(-1)=-1 \Leftrightarrow -\kappa+\lambda=-1$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $2\lambda=-2 \Leftrightarrow \lambda=-1$ και $\kappa-1=-1 \Leftrightarrow \kappa=0$, οπότε το ζητούμενο υπόλοιπο είναι το – 1.

Ομάδα Γ

α) Επειδή το πολυώνυμο είναι 4ου βαθμού, ισχύει ότι $\begin{cases}\lambda-2=0\\ \lambda-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=2\\ \lambda\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=2$.

Τότε $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+\alpha x+\beta$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$\begin{array}{rr|l} & x^4-5x^3+5x^2+\alpha x+\beta & x^2-3x+2 \\ \cline{3-3} + & -x^4+3x^3-2x^2 & x^2-2x-3 \\ \hline & -2x^3+3x^2+\alpha x+\beta & \\ + & 2x^3-6x^2+4x & \\ \hline & -3x^2+(\alpha+4)x+\beta & \\ & 3x^2-9x+6 & \\ \hline & (\alpha-5)x+\beta+6 & \end{array}$$

$$(\alpha-5)x+\beta+6=2x-3\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-5=2\\ \beta+6=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=7\\ \beta=-9\end{cases}$$

$$P(x)=(x^2-3x+2)(x^2-2x-3)+2x-3=x^4-5x^3+5x^2+7x-9$$

β) $P(x)<2x-3\Leftrightarrow(x^2-3x+2)(x^2-2x-3)+2x-3<2x-3\Leftrightarrow$

$(x^2-3x+2)(x^2-2x-3)<0$

$x\in(-1,1)\cup(2,3)$

x	$-\infty$ - 1	1	2	3 $+\infty$	
x^2-3x+2	+	+ ○	- ○	+	+
x^2-2x-3	+ ○	-	-	- ○	+
Γινόμενο	+	-	+	-	+

γ) $(\beta-1)x^{1924}+(\gamma-2)x^{1453}+\delta-1=P(x)-x^4+5x^3-5x^2-7x$

$(\beta-1)x^{1924}+(\gamma-2)x^{1453}+\delta-1=x^4-5x^3+5x^2+7x-9-x^4+5x^3-5x^2-7x$

$$(\beta-1)x^{1924}+(\gamma-2)x^{1453}+\delta-1=-9\Leftrightarrow\begin{cases}\beta-1=0\\ \gamma-2=0\\ \delta-1=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=1\\ \gamma=2\\ \delta=-8\end{cases}$$

δ) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{P(x)-2x+3}>\dfrac{2}{x-2}\Leftrightarrow\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x^2-3x+2)(x^2-2x-3)}>\dfrac{2}{x-2}\Leftrightarrow$

$$\frac{\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x-2)}\,(x+1)\,\cancel{(x-3)}}>\frac{2}{x-2}$$

Για $x\neq\pm1$ και $x\neq 3$ είναι

$\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x-2}>0\Leftrightarrow\dfrac{x-2-2x-2}{(x+1)(x--2)}>0\Leftrightarrow$

$(-x-4)(x+1)(x-2)>0\Leftrightarrow$

$x\in(-\infty,-4)\cup(-1,2)$

x	$-\infty$ - 4	-1	2	$+\infty$
$-x-4$	+ ○	-	-	-
$x+1$	-	- ○	+	+
$x-2$	-	-	- ○	+
Γινόμενο	+	-	+	-

ε) $P(0)=-9,\ P(-1)=-5$

$\sqrt{x+P(0)+6}>x+P(-1)\Leftrightarrow\sqrt{x-3}>x-5$ (3). Πρέπει $x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq 3$.

Αν $x-5<0\Leftrightarrow 3\leq x<5$ τότε η (3) είναι αληθής. Αν $x-5\geq 0\Leftrightarrow x\geq 5$ η (3) γίνεται:

$\left(\sqrt{x-3}\right)^2>(x-5)^2\Leftrightarrow x-3>x^2-10x+25\Leftrightarrow x^2-11x+28<0\Leftrightarrow 4<x<7$ και από τον περιορισμό προκύπτει ότι $x\in[5,7)$.

στ) $Q(1)=\left(P(1)\right)^{2024}+\left(P(1)\right)^{1821}-2=0+0-2=-2$, $Q(2)=\left(P(2)\right)^{2024}+\left(P(2)\right)^{1821}-2=0+0-2=-2$.

Επειδή ο διαιρέτης είναι 2ου βαθμού, το υπόλοιπο θα είναι το πολύ 1ου βαθμού.

Έστω $\kappa x+\lambda$ το ζητούμενο υπόλοιπο, τότε αν π(x) το πηλίκο της διαίρεσης, ισχύει ότι:

$Q(x)=(x^2--x++2)\pi(x)+\kappa x+\lambda$.

Είναι $Q(1)=-2 \Leftrightarrow \kappa+\lambda=-2$ και $Q(2)=-2 \Leftrightarrow 2\kappa+\lambda=-2$, οπότε με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει $\kappa=0$ και $0+\lambda=-2 \Leftrightarrow \lambda=-2$, οπότε το ζητούμενο υπόλοιπο είναι το – 2.

Ομάδα Δ

α) Επειδή το πολυώνυμο είναι 3ου βαθμού, ισχύει ότι $\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$.

Τότε $P(x)=2x^3-x^2+\alpha x+\beta$.Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^3-x^2+\alpha x+\beta & x^2-4 \\ + & -2x^3+ \quad\quad 8x & \overline{2x-1} \\ \hline & -x^2+(\alpha+8)x+\beta & \\ + & x^2- \quad\quad 4 & \\ \hline & (\alpha+8)x+\beta-4 & \end{array}$$

$$(\alpha+8)x+\beta-4=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+8=1\\ \beta-4=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-7\\ \beta=6\end{cases}$$

$$P(x)=\left(x^2-4\right)(2x-1)+x+2=2x^3-x^2-7x+6$$

β) $P(x)<x+2 \Leftrightarrow \left(x^2-4\right)(2x-1)+x+2<x+2 \Leftrightarrow$

$\left(x^2-4\right)(2x-1)<0$

$x \in (-\infty,-2) \cup \left(\frac{1}{2},2\right)$

x	−∞ - 2 1/2 2 +∞			
x^2-4	+ ○	-	- ○	+
$2x-1$	-	- ○	+	+
Γινόμενο	-	+	-	+

γ) $(\beta-1)x^{1924}+(\gamma-2)x^{1453}+\delta-1=P(x)-2x^3+x^2+7x$

$(\beta-1)x^{1924}+(\gamma-2)x^{1453}+\delta-1=2x^3-x^2-7x+6-2x^3+x^2+7x$

$$(\beta-1)x^{1924}+(\gamma-2)x^{1453}+\delta-1=-6 \Leftrightarrow \begin{cases}\beta-1=0\\ \gamma-2=0\\ \delta-1=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=1\\ \gamma=2\\ \delta=-5\end{cases}$$

δ) $$\frac{(x+2)(x-3)}{P(x)-x-2}>\frac{2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{(x+2)(2x-1)}{\left(x^2-4\right)(2x-1)}>\frac{2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{\cancel{(x+2)}\,\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(x+2)}\,(x-2)\,\cancel{(2x-1)}}>\frac{2}{x+1}\,(1)$$

Για $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ και $2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$ Η (1) γίνεται:

$\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+1}>0 \Leftrightarrow \frac{x+1-2x+4}{(x-2)(x+1)}>0 \Leftrightarrow$

$(-x+5)(x-2)(x+1)>0$

$x \in (-\infty,-1) \cup (2,5)$

x	−∞ - 1 2 5 +∞			
$-x+5$	+	+	+ ○	-
$x+1$	- ○	+	+	+
$x-2$	-	- ○	+	+
Γινόμενο	+	-	+	-

ε) $P(0)=6,\ P(2)=4$

$\sqrt{x-P(2)+1}<x-P(0)+1 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}<x-5$ (3). Πρέπει $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Αν $x-5<0 \Leftrightarrow 3 \leq x<5$ τότε η (3) είναι αδύνατη. Αν $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ η (3) γίνεται:

$\left(\sqrt{x-3}\right)^2<(x-5)^2 \Leftrightarrow x-3<x^2-10x+25 \Leftrightarrow x^2-11x+28>0 \Leftrightarrow x<4$ ή $x>7$ και από τον περιορισμό προκύπτει ότι $x \in (7,+\infty)$.

στ) $Q(-2)=\left(P(-2)\right)^{2024}+\left(P(-2)\right)^{1453}+3=0+0+3=+3$,

$Q(2)=\left(P(2)\right)^{2024}+\left(P(2)\right)^{1453}+3=0+0+3=+3$.

Επειδή ο διαιρέτης είναι 2ου βαθμού, το υπόλοιπο θα είναι το πολύ 1ου βαθμού.

Έστω $\kappa x+\lambda$ το ζητούμενο υπόλοιπο, τότε αν π(x) το πηλίκο της διαίρεσης, ισχύει ότι:

$Q(x)=\left(x^2-4\right)\pi(x)+\kappa x+\lambda$.

Είναι $Q(-2)=3 \Leftrightarrow -2\kappa+\lambda=3$ και $Q(2)=3 \Leftrightarrow 2\kappa+\lambda=3$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$\lambda = 3$ και $2\kappa + 3 = 3 \Leftrightarrow \kappa = 0$, οπότε το ζητούμενο υπόλοιπο είναι το 3.